Dr. H. Buchholz.

UNTERSUCHUNG

DER

BEWEGUNG VOM TYPUS 2/3 IM PROBLEM DER DREI KÖRPER

UND DER

„HILDA-LÜCKE“ IM SYSTEM DER KLEINEN PLANETEN

AUF GRUND DER

GYLDÉN'SCHEN STÖRUNGSTHEORIE.

DER HOHEN PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT DER KÖNIGLICHEN VEREINIGTEN FRIEDRICHS-UNIVERSITÄT HALLE-WITTENBERG

ALS

HABILITATIONSSCHRIFT

VORGELEGT VON

DR. PHIL. HUGO BUCHHOLZ.

VERKÜRZTER ABDRUCK AUS DEM LXXII. BANDE DER DENKSCHRIFTEN DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

WIEN 1902.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

UNTERSUCHUNG

DER

BEWEGUNG VOM TYPUS 2/3 IM PROBLEM DER DREI KÖRPER

UND DER

„HILDA-LÜCKE“ IM SYSTEM DER KLEINEN PLANETEN

AUF GRUND DER

GYLDÉN'SCHEN STÖRUNGSTHEORIE.

DER HOHEN PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT DER KÖNIGLICHEN VEREINIGTEN FRIEDRICHS-UNIVERSITÄT HALLE-WITTENBERG

ALS

HABILITATIONSSCHRIFT

VORGELEGT VON

DR. PHIL. HUGO BUCHHOLZ,

VERKÜRZTER ABDRUCK AUS DEM LXXII. BANDE DER DENKSCHRIFTEN DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

ACAD. LUGD. BAT. GIBL

WIEN 1902.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548112_0187

UNTERSUCHUNG

DER

BEWEGUNG VOM TYPUS 2/3 IM PROBLEM DER DREI KÖRPER UND DER „HILDA-LÜCKE“ IM SYSTEM DER KLEINEN PLANETEN AUF GRUND DER GYLDÉN'SCHEN STÖRUNGSTHEORIE

VON

DR. HUGO BUCHHOLZ,
PRIVATDOCENT AN DER UNIVERSITÄT HALLE A. S.

ERSTER THEIL.

VORGELEGT IN DER SITZUNG VOM 13. JUNI 1901.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Vorwort . . . . . 3 [311]

Capitel I.

Ableitung der Gyldén'schen Form der allgemeinen Differentialgleichungen der Planetenbewegung.

A. Ableitung der Hansen'schen Form der Bewegungsgleichungen des Planeten in seiner instantanen Bahnebene . . . . . 6 [314]

B. Ableitung der Gyldén'schen Form aus der Hansen'schen . . . . . 10 [318]

Capitel II.

Die Gyldén'sche Darstellung der Störungsfunction und ihrer Derivierten in der Brendel'schen Form und die numerische Entwickelung für Hilda.

A. Der allgemeine Gang der analytischen Entwickelung . . . . . 23 [331]

1. Erster Weg: Successive Berechnung der β, γ, Ω, P und Q, A und B . . . . . 23 [331]

2. Zweiter Weg: Successive Berechnung der β, γ, ϑ, A und B . . . . . 43 [351]

B. Ausführung der numerischen Rechnung für den Planeten (153) Hilda . . . . . 49 [357]

Capitel III.

Die Bestimmung der elementären und der charakteristischen Glieder für den Hilda-Typus . . . 58 [366]

Seite

Capitel IV.

Die Integration der Differentialgleichungen des Hilda-Typus mittelst des Gyldén'schen Verfahrens der partiellen Integration in der Brendel'schen Modification.

I. Vorbereitung der Integration.

A. Übergang auf die zu integrierenden Differentialgleichungen des Hilda-Typus . . . . . 83 [391]
B. Genäherte Darstellung der α und γ durch die β für den 0ten und 1ten Grad . . . . . 90 [398]

II. Ausführung der Integration.

A. Die Integration für den 0ten Grad bis incl. Glieder III. Ordnung.

1. Die Integration der Differentialgleichung für S . . . . . 95 [403]
2. Die Integration der Differentialgleichung für ρ . . . . . 97 [405]
3. Die Integration der Differentialgleichung für T . . . . . 99 [407]
4. Über die in der Zeitreduction auftretende Constante . . . . . 102 [410]

B. Die Integration für den 1ten Grad bis incl. Glieder II. Ordnung.

a). Die genäherte Integration bei constantem η, η', π, π_1.

1. Die Integration der Differentialgleichung für S . . . . . 109 [417]
2. Die Integration der Differentialgleichung für $\rho = (\rho) + R$ . . . . . 114 [422]
   2*a*. Die Integration der Differentialgleichung für (ρ) . . . . . 118 [426]
   2*b*. Die Integration der Differentialgleichung für R . . . . . 121 [429]
3. Die Integration der Differentialgleichung für T . . . . . 125 [433]

b). Die strenge Integration bei variablem η, η', π, π_1.

Das allgemeine Verfahren.

1. Die Integration der Differentialgleichung für S . . . . . 134 [442]
2. Die Integration der Differentialgleichung für $\rho = (\rho) + R$ . . . . . 136 [444]
   2*a*. Die Integration der Differentialgleichung für (ρ) . . . . . 141 [449]
   2*b*. Die Integration der Differentialgleichung für R . . . . . 144 [452]
3. Die Integration der Differentialgleichung für T . . . . . 148 [456]

C. Die Integrationsconstanten . . . . . 149 [457]

Capitel V.

Die vorläufigen numerischen Ergebnisse der ersten Näherung für die Grenzen der »Hilda-Lücke« im System der kleinen Planeten.

A. Über die Giltigkeit des Verfahrens in der ersten Näherung . . . . . 151 [459]
B. Die numerische Rechnung für Hilda . . . . . 158 [466]

VORWORT.

Die erste Anregung zu den folgenden Untersuchungen erhielt ich durch Gyldén, der mich im Jahre 1896 in Stockholm veranlasste, die numerische Entwickelung der Störungsfunction für den Planeten Hilda in ihren Grundlagen durchzuführen, da er die Resultate zur Anwendung seines »horistischen« Integrationsverfahrens auf diesen Planeten benutzen wollte. Meine damaligen Rechnungen sind nach Gyldén's Tode unter seinem Nachlass verblieben, so dass ich jetzt zu ihrer Ausführung von neuem genöthigt war.

Bekanntlich versagen die bis zu Gyldén in der analytischen Störungstheorie gebräuchlichen Methoden, wenn es sich darum handelt, die Bahn eines kleinen Planeten zu berechnen, dessen mittlere Bewegung n zu derjenigen n' des Jupiter in einem commensurabeln Verhältnis steht, wo also dies Verhältnis $\frac{n'}{n} = \mu$ durch einen ganzzahligen rationalen Bruch ausgedrückt ist, z. B. durch $\mu = \frac{1}{2}$, $\mu = \frac{1}{3}$ etc. Gyldén nennt diese Planeten solche vom »Typus« $\frac{1}{2}$, vom »Typus« $\frac{1}{3}$ etc. Der Wert der neuen durch Gyldén geschaffenen Störungstheorie zeigt sich unter anderem gerade darin, dass sie die Behandlung solcher Commensurabilitätstypen ermöglicht.

Von diesen Typen sind auf Grund der Gyldén'schen Principien in näherem oder entfernterem Anschluss an die verschiedenen, durch Gyldén aufgestellten Integrationsverfahren bis jetzt nur die Typen $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ durch die Arbeiten der Herren Backlund,[1] Brendel,[2] Harzer[3] und Ludendorff[4] behandelt worden. Der Hildatypus $\left(\frac{2}{3}\right)$, dessen Bearbeitung den Gegenstand der folgenden Untersuchungen bildet, bietet nicht nur theoretische Schwierigkeiten, sondern verursacht auch in rechnerischer Beziehung mehr Arbeitsaufwand als die meisten übrigen kleinen Planeten, da dieser Typus nicht mehr im Gyldénschen Tafelwerk[5] tabuliert ist, während der Typus $\frac{1}{2}$, wie fast alle kleinen Planeten, in demselben enthalten ist.

Als Integrationsverfahren habe ich das Gyldén'sche Verfahren der partiellen Integration in der Modification von Herrn Brendel, sowie auch sonst dessen »Theorie der kleinen Planeten«[6] benutzt, ein Werk, in welchem der Verfasser sich durch seine systematische Ausarbeitung der Gyldén'schen Principien für die Behandlung der kleinen Planeten große Verdienste um die neue Störungstheorie

---

[1] O. Backlund, »Über die Bewegung einer gewissen Gruppe der kleinen Planeten«. Mémoires de l'Académie impériale des Sciences de St. Petersbourg, VII Série, Tome XXXVIII, No. 11.

O. Backlund, »Über die Bewegung der kleinen Planeten vom Hecubatypus«. Cf. ibidem VIII Série, Volume VI, No. 10.

[2] M. Brendel. »Om användningen af den absoluta Störingstheorien på en grupp af små planeterna med numerisk tillämpning på planeten (46) Hestia«. Astronomiska Iaktagelser och undersökningar anställda på Stockholms Observatorium IV, 3.

M. Brendel, »Über die Anwendung der Gyldén'schen absoluten Störungstheorie auf die Breitenstörungen einer gewissen Classe kleiner Planeten nebst numerischem Beispiel für den Planeten (46) Hestia«. Göttingen, Druck der Dietrich'schen Universitätsbuchhandlung.

[3] P. Harzer, »Untersuchungen über einen speciellen Fall des Problems der drei Körper«. Mémoires de l'Académie impériale des sciences de St. Petersbourg, VII Série, Tome XXXIV, No. 12.

[4] H. Ludendorff, »Die Jupiterstörungen der kleinen Planeten vom Hecubatypus. Berlin, Mayer und Müller.

[5] H. Gyldén, »Hilfstafeln zur Berechnung der Hauptungleichheiten in den absoluten Bewegungstheorien der kleinen Planeten« Publicationen der Astr. Gesellschaft, XXI. In Commission bei W. Engelmann, Leipzig.

Einige Druckfehler des Gyldén'schen Tafelwerkes sind im Folgenden auf Seite 49 [357] angegeben.

[6] M. Brendel, »Theorie der kleinen Planeten«. I. Theil. Abhandlungen der königl. Gesellsch. der Wissenschaften zu Göttingen. Math. physik. Classe. Neue Folge, Bd. I, Nr. 2.

erworben hat; ebenso wie Herr Backlund, in dessen Hände auf Wunsch von Gyldén auch der Nachlass des letzteren gelegt worden ist.

Die von Gyldén kurz vor seinem Tode auf Grund seiner Nouvelles recherches[1] ausgebildete »horistische Integrationsmethode« (cf. übrigens Capitel V, S. 157 [465] des Folgenden) konnte im folgenden leider noch nicht zur Anwendung kommen. Denn diese Methode ist bezüglich der eigentlichen Integration in einigen kurz vor Gyldén's Tode erschienenen kleinen Aufsätzen,[2] sowie in der Vorrede zu Gyldén's erwähntem Tafelwerke, hinsichtlich ihrer wirklichen Anwendung, nur angedeutet. Erst nachdem Herr Backlund die schwierige Ausarbeitung und Herausgabe des Gyldén'schen Nachlasses vollendet und, wie zu hoffen, detailliertere Vorschriften bezüglich der wirklichen Anwendung der horistischen Methode gegeben haben wird — die Gyldén als einen entscheidenden Fortschritt gegenüber allen seinen zuvor gebrauchten Verfahren bezeichnet — kann dieselbe zugleich in ihrer ganzen Tragweite übersehen werden.

Seine Kritik der zuvor in der analytischen Störungstheorie angewandten Integrationsmethoden fasst Gyldén dahin zusammen, »dass sowohl das von Hansen angewandte Integrationsverfahren, als auch das Leverrier'sche, welche beide ebenso wie die Mehrzahl der übrigen angewandten Methoden im Grunde identisch sind, streng genommen der wissenschaftlichen Berechtigung entbehren«. Und die großen Arbeiten der letzten Jahrzehnte seines Lebens zielten eben auf nichts Geringeres hinaus, als die gesammte bisherige Anschauung der Kepler'schen Ellipse als Ausgangspunkt für die planetarische Bewegung durch eine neue zu ersetzen, welcher nicht die principiellen Mängel der alten anhaften. »Die neuen Integrationsmethoden«, sagt Herr Backlund, »die Gyldén zu dem Zwecke schuf, und zwar in erster Linie die sogenannte horistische, gehören zu seinen genialsten Leistungen«. Und er weist darauf hin, dass die Untersuchungen, welche den Kernpunkt der zweiten Periode von Gyldén's wissenschaftlicher Lebensarbeit bilden, nach dessen eigener Meinung das Hauptresultat seiner Forschung repräsentieren. »Gyldén«, fährt Herr Backlund fort, »hat mit diesen Arbeiten eine neue Richtung eingeleitet und neue Methoden geschaffen.... Dass sie epochemachender Natur sind, sei es direct oder indirect, scheint mir keinem Zweifel zu unterliegen. Bei seiner eminenten mathematischen Begabung erfüllte Gyldén die Vorbedingungen, Epochemachendes zu leisten.... Ihm fiel es nicht schwer, auf die Anerkennung der Zeitgenossen zu verzichten, strebte er doch vor allen Dingen, die Wahrheit zu ergründen«.

Ist auch Gyldén in seiner schöpferischen Neubehandlung des Störungsproblems dem allgemeinen Verständnis zunächst vorausgeeilt, und »verlangen seine Methoden«, wie Herr Backlund sagt, »der Natur der Sache gemäß einen gewissen Zeitraum, um die astronomischen Anschauungen zu beeinflussen, resp. in ihnen das Bürgerrecht zu erwerben«, so übersteigen doch jene wegwerfenden Urtheile, die über die großen Arbeiten Gyldén's laut werden, noch die Grenzen bloßen Nichtverständnisses. Und in der That frägt man vergebens nach einer sachlichen Begründung dieser absprechenden Urtheile, die über die Theorie Gyldén's von Diesem und Jenem — gerade in Schweden — so leichthin gefällt werden.

Besonders warmen Dank möchte ich noch an dieser Stelle Herrn Brendel aussprechen für die vielseitige Belehrung und reiche wissenschaftliche Förderung, die er mir in Bezug auf Gyldén's Theorie fortgesetzt hat zutheil werden lassen, wie er ja auch der Einzige ist, der unermüdet bisher bestrebt gewesen, den Ideen seines großen Lehrers in Deutschland allmählich Eingang zu schaffen und der Gyldén's Richtung bei uns gefördert hat. Und das im folgenden auf Hilda angewandte Integrationsverfahren beruht ja auch auf der von Herrn Brendel in seiner Theorie der kleinen Planeten gegebenen

---

[1] H. Gyldén, »Nouvelles recherches sur les séries employées dans les théories des planetes«. Acta Mathematica, Tome 15 et 17

[2] Om bestämningen af ojemnheter med mycket lång period i theorien för planeters och satelliters rörelser. Översigt af Kongl. Vetenskaps-Academiens Förhandlingar 1895, Nr. 7, Stockholm.

Olika methoder att bestämma de horistiska termerna i den differentialeqvation, som förmedlar härledningen af ojemnheterna en planets longitud. I. Cf. ibidem 1896. Nr. 6.

Modification der Gyldén'schen Methode der partiellen Integration, die dieser selbst benützte, ehe er seine letzte, die horistische Methode, noch in ihren allgemeinen Zügen schuf.

Als Einleitung schicke ich eine kurze Analyse der Gyldén'schen Grundprincipien voraus und nehme bei Entwickelung der Störungsfunction Gelegenheit, einige noch nicht veröffentlichte Formeln Gyldén's anzuführen, die ich bereits in Stockholm bei meinen Rechnungen für Gyldén verwandte. Zugleich habe ich den Versuch gemacht, die folgende Darstellung für Hilda so zu geben, dass sie ein leicht verständliches Beispiel der wirklichen Anwendung von Gyldén's Principien bildet. Auch sind in derselben Glieder dritter Ordnung berücksichtigt worden, die Gyldén nicht näher in den Bereich seiner Untersuchungen gezogen hat, und es ist bei Berechnung der Lücke gezeigt, dass diese Glieder in einem extremen Falle, wie Hilda, einen bedeutenden Einfluss auf das Resultat ausüben. Entsprechend der neuen Gyldén'schen Anschauungsweise treten dabei in den folgenden Untersuchungen im ganzen sechs verschiedene Gliedertypen auf: Die von Gyldén sobenannten »elementären«, die »charakteristischen« und die »coordinierten« Glieder, von denen die beiden ersteren Gliederarten in den Entwickelungen für die partiellen Derivierten der Störungsfunction für jeden Planetentypus, wenn man ihn nach den Gyldén'schen Principien behandeln will, gesondert zu bestimmen sind, während die coordinierten Glieder nach Integration der Differentialgleichungen für S und ρ auf der rechten Seite der Differentialgleichung für die Zeitreduction auftreten; ferner die bei der numerischen Rechnung mitzuberücksichtigenden, noch in Betracht kommenden gewöhnlichen Störungsglieder. Aus allen diesen Gliedern setzen sich die rechten Seiten der zu integrierenden Gyldén'schen Differentialgleichungen in S, ρ, T zusammen. Bei der Integration dieser Differentialgleichungen ergibt dann die Variabilität des langperiodischen Theiles T_l in den Winkelargumenten der auftretenden trigonometrischen Functionen die sogenannten »exargumentalen« Glieder, während die Berücksichtigung der Variabilität der langperiodischen Functionen η, η', π, π_1 (insofern es sich nicht um die elementären Glieder der Form B, sondern um die charakteristischen handelt), die sogenannten »Zusatzglieder« liefert. Auch ist im Folgenden den Gliedern zweiter Ordnung ersten Grades in den Derivierten der Störungsfunction von vorneherein Rechnung getragen und beim dritten Grade sind, wie der zweite Theil zeigen wird, auch die exargumentalen Glieder noch berücksichtigt worden, da dies für Hilda nothwendig war, während beim nullten Grad die Glieder dritter Ordnung in P und Q mitgenommen sind. —

Die Weiterführung der numerischen Rechnung und die analytische Darstellung der Störungen höheren Grades für den Radius vector sammt der von der Neigung herrührenden Glieder, sowie der Breitenstörungen, Entwickelungen, die ich zum Theil bereits durchgeführt habe, werden in bald erscheinender Fortsetzung dieser Studien folgen.

Halle, im Februar 1902.

Der Verfasser.

Fünftes Capitel.

Die vorläufigen numerischen Ergebnisse der ersten Näherung für die Grenzen der »Hilda-Lücke« im System der kleinen Planeten.

A. Über die Giltigkeit des Verfahrens in der ersten Näherung.

Bekanntlich haben außer Gyldén selbst die Herren Brendel und Callandreau wertvolle Untersuchungen über das Auftreten der Lücken im System der kleinen Planeten gemacht, ja Herr Brendel hat bereits erste genäherte numerische Rechnungen für Hilda in seiner Theorie der kleinen Planeten angestellt. Es ist von Interesse, zu sehen, wie sich im folgenden die Grenzen der Lücke im Typus $\left(\frac{2}{3}\right)$ durch Berücksichtigung der Glieder dritter Ordnung, die ich mitgenommen habe, verificieren. Im Sinne des Brendel'schen Verfahrens[1] für kritische Planeten werden wir dabei die Constante a_0, über die wir noch willkürlich verfügen konnten, für Hilda so bestimmen, dass der in pars const. $\frac{dT}{dv}$ auftretende Theil rein erster oder höherer Ordnung verschwindet.

Als Wert der Constanten b_0 hatten wir im vierten Capitel gefunden:

$$b_0 = 2a_0 + h_0 + h_1\beta_1 + h_2\beta_1^2, \tag{1}$$

wo:

$$\left.\begin{aligned} h_0 &= -B_{0.0.0} \\ h_1 &= -\frac{1}{2}B^{1.0}_{3.0.0} + \frac{3\mu}{1+\delta_1}B_{3.0.0} + \frac{1+\delta_1}{2}A_{3.0.0} \\ h_2 &= -\frac{1}{2}B^{2.0}_{0.0.0} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

war. Setzen wir diesen Wert von b_0 in die Gleichung der Constanten:

$$c_0 + \gamma = \left(a_0 - 2b_0 - a_1\beta_1 - 6b_0\beta_1^2 + \frac{3}{2}a_0\beta_1^2\right) + \frac{3}{2}\beta_1^2,$$

die sich bei Integration der Gleichung für T ergab, ein, so wird dieselbe:

$$c_0 + \gamma = (-3a_0 + l_0 + l_1\beta_1 + l_2\beta_1^2 + l_3\beta_1^3 + l_4\beta_1^4) + \frac{3}{2}\beta_1^2,$$

---

[1] Cf. 1. Martin Brendel, Über die Lücken im System der kleinen Planeten und über ein Integrationsverfahren im Problem der drei Körper. Astr. Nachrichten, Band 140, Nr. 3346. — 2. Martin Brendel, Theorie der kleinen Planeten, Capitel VII.

wobei:

$$\left.\begin{aligned} l_0 &= 2B_{0.0.0} \\ l_1 &= B^{1.0}_{3.0.0} - \frac{6\mu}{1+\delta_1} B_{3.0.0} - (1+\delta_1) A_{3.0.0} - a_1 \\ l_2 &= B^{2.0}_{0.0.0} + 6B_{0.0.0} - \frac{21}{2} a_0 \\ l_3 &= 3B^{1.0}_{3.0.0} - \frac{18\mu}{1+\delta_1} B_{3.0.0} - 3(1+\delta_1) A_{3.0.0} \\ l_4 &= 3B^{2.0}_{0.0.0} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

ist.

Da also l_0, l_1, l_2, l_3, l_4 rein erster Ordnung sind, so bestimmen wir a_0 so, dass:

$$c_0 = -3a_0 + l_0 + l_1\beta_1 + l_2\beta_1^2 + l_3\beta_1^3 + l_4\beta_1^4 = 0,$$

also:

$$a_0 = \frac{1}{3}(l_0 + l_1\beta_1 + l_2\beta_1^2 + l_3\beta_1^3 + l_4\beta_1^4) \tag{4}$$

wird. Hiermit wird auch a_0 rein erster Ordnung, wie wir voraussetzten; denn wenn z. B. l_3 rein erster Ordnung ist, so müssen, da $\beta < 1$ ist, die Producte $l_3\beta_1$, $l_3\beta_1^2$, $l_3\beta_1^3$ etc. alle kleiner als l_3 selbst und somit erst recht rein erster Ordnung sein. Und weiter wird:

$$\gamma = \frac{3}{2}\beta_1^2. \tag{4a}$$

Schließlich hatten wir für β_1 folgende Gleichung gefunden:

$$(2\delta_1 + \delta_1^2)\beta_1 = p' + p''\beta_1 + p'''\beta_1^2, \tag{5}$$

wo die $p = m'$ und gegeben waren durch:

$$\left.\begin{aligned} p' &= B_{3.0.0} - \frac{2A_{3.0.0}}{1+\delta_1} \\ p'' &= B^{1.0}_{0.0.0} + \frac{1}{2} B^{1.0}_{6.0.0} - \frac{A^{1.0}_{6.0.0}}{1+\delta_1} - \frac{1+\delta_1}{2} A_{6.0.0} - \frac{6\mu B_{6.0.0}}{1+\delta_1} + \frac{12\mu A_{6.0.0}}{(1+\delta_1)^2} \\ p''' &= \frac{1}{2} B^{2.0}_{3.0.0} + \frac{1}{4} B^{2.0}_{3.0.0} + \frac{1}{4} B^{2.0}_{9.0.0} - \frac{A^{2.0}_{3.0.0}}{1+\delta_1} + \frac{A^{2.0}_{3.0.0}}{2(1+\delta_1)} - \frac{A^{2.0}_{9.0.0}}{2(1+\delta_1)} \\ &\quad - \frac{1+\delta_1}{4} A^{1.0}_{3.0.0} - \frac{1+\delta_1}{4} A^{1.0}_{9.0.0} - \frac{3\mu B^{1.0}_{3.0.0}}{2(1+\delta_1)} - \frac{9\mu B^{1.0}_{9.0.0}}{2(1+\delta_1)} - \frac{3\mu A^{1.0}_{3.0.0}}{(1+\delta_1)^2} \\ &\quad + \frac{9\mu A^{1.0}_{9.0.0}}{(1+\delta_1)^2} - \frac{3}{2}\mu A_{3.0.0} + \frac{9}{2}\mu A_{9.0.0} - \frac{9\mu^2 B_{3.0.0}}{(1+\delta_1)^2} + \frac{9\mu^2 B_{3.0.0}}{2(1+\delta_1)^2} \\ &\quad + \frac{81\mu^2 B_{9.0.0}}{2(1+\delta_1)^2} + \frac{18\mu^2 A_{3.0.0}}{(1+\delta_1)^3} + \frac{9\mu^2 A_{3.0.0}}{(1+\delta_1)^3} - \frac{81\mu^2 A_{9.0.0}}{(1+\delta_1)^3}, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

aus der wir nun β_1 wirklich zu bestimmen haben. Ist β_1 gefunden, so ist auch die Constante:

$$b_0 = 2a_0 + h_0 + h_1\beta_1 + h_2\beta_1^2$$

berechenbar, sobald man über a_0 verfügt hat.

Nun ist für den Typus $\frac{2}{3}$:

$$\mu = \frac{2-\delta}{3}, \quad \mu_1 = \frac{2-\delta_1}{3},$$

und es war:

$$\mu_1 = \mu(1+\gamma).$$

also $2-3\mu_1 = \delta_1$, oder $2-3\mu-3\mu\gamma = \delta_1$, mithin:

$$\delta_1 = \delta - 3\mu\gamma. \tag{7}$$

So lange nun δ_1 nicht sehr klein wird — also bei den gewöhnlichen und auch bei denjenigen charakteristischen Planeten, für welche δ_1 noch so groß ist, dass sie nicht kritisch sind — und zwar der Größenordnung nach nicht kleiner als die Quadratwurzel aus der störenden Masse, also:

$$\delta_1 \asymp \sqrt{m'}$$

wird offenbar auf Grund von Gleichung (5):

$$\beta_1 \ll \sqrt{m'}.$$

Denn da mit Fortlassung des Gliedes $p'''\beta_1^2$, wodurch keine wesentliche Modification eintritt:

$$\beta_1 = + \frac{p'}{2\delta_1 + \delta_1^2 - p''}, \tag{8}$$

so ist, wenn $\delta_1 \asymp \sqrt{m'}$ ist, offenbar p'' sehr klein gegen δ_1, denn es ist $p'' \asymp m' = \frac{1}{1000}$ und $\delta_1 \asymp \sqrt{m'} = \frac{1}{32}$ oder größer; also:

$$\beta_1 \asymp \frac{p'}{2\delta_1 + \delta_1^2},$$

indem man bei Bestimmung der Ordnung einer Größe ja jede kleinere, die in ihr auftritt, gegenüber einer größeren fortlassen kann. Nun ist aber auch δ_1 immer viel kleiner als 1, denn es ist ja die kleine Größe, um welche μ_1 vom rationalen Bruch $\frac{2}{3}$ abweicht. Daher ist auch $\delta_1^2 < \delta_1$, also:

$$\beta_1 \asymp \frac{p}{2\delta_1},$$

und da $p' \asymp m'$ und man natürlich δ_1 und $2\delta_1$ auch als von der gleichen Ordnung zu betrachten hat, so ist:

$$\beta_1 \asymp \frac{m'}{\delta_1},$$

also, wenn $\delta_1 \asymp \sqrt{m'}$:

$$\beta_1 \ll \sqrt{m'}; \quad \beta_1^2 \ll m'.$$

Verfügt man in diesem Falle über die Constante a_0 so, dass der ganze constante Theil von $\frac{dT}{dv}$ verschwindet, also $c_0+\gamma = 0$ wird, und mithin $\delta_1 = \delta$, so wäre a_0 zu bestimmen aus der Gleichung:

$$3a_0 = l_0 + l_1\beta_1 + l_2\beta_1^2 + l_3\beta_1^3 + l_4\beta_1^4 + \frac{3}{2}\beta_1^2. \tag{9}$$

und dann würde offenbar:

$$a_0 \asymp m',$$

weil die größten Glieder in Gleichung (9) rein von der Ordnung der störenden Masse sind. Denn wenn:

$$a = b + c,$$

so ist jedenfalls:

$$a \asymp b, \text{ wenn } b > c,$$

aber:

$$a \asymp c, \text{ wenn } b < c$$

ist. Und da $l_1\beta_1 \ll m'$, dagegen $l_0 \asymp m'$ ist, und das größte Glied den Ausschlag für die Größenordnung gibt, so ist eben jetzt a_0 rein von der Ordnung der störenden Masse. Da aber a_0 der constante Theil von S_0 und $a_1 \asymp m'$ ist, so ist auch:

$$S_0 \asymp m'.$$

Es wird dann also S_0 hinreichend klein, was die nothwendige Bedingung für die Convergenz unserer Entwickelungen ist. Denn wenn S_0 groß wäre, so wären auch R_0, T_0 und K_0 groß und damit die Entwickelungen von P und Q, die nach R_0 und K_0 fortschreiten, divergent, was jetzt indes nicht der Fall ist.

Würde hingegen für einen Planeten:

$$\delta_1 \ll \sqrt{m'},$$

wo er dann »kritisch« wäre, und convergierte nun δ_1 gegen Null, so würde offenbar β_1 nach der Gleichung (8) immer mehr wachsen und für einen Wert von δ_1, der rein von der Ordnung m', derart, dass:

$$2\delta_1 + \delta_1^2 = +p''$$

wäre, würde $\beta_1 = \infty$. Mithin würde dann auch $\gamma = \frac{3}{2}\beta_1^2$ über alle Grenzen wachsen.

Nach der Gleichung (7) aber würde, wenn γ bei constantem δ wächst, δ_1 immer größere negative Werte bekommen und daher β_1 nach Gleichung (8) immer kleiner werden, was dem obigen widerspricht.

Thatsächlich kann β_1 nicht so klein werden, dass $\beta_1 \asymp \sqrt{\delta}$ wird, und man erkennt somit vorläufig schon allgemein, dass δ_1 nicht unter eine gewisse Grenze herabsinken kann, während β_1 nicht über eine bestimmte Grenze hinauswachsen kann, deren Werte wir jetzt präcisieren wollen.

Wollte man, wenn δ_1 beliebig klein wird, also bei kritischen Planeten, a_0 so bestimmen, dass der ganze constante Theil der Differentialgleichung für die Zeitreduction verschwände, also auch $\gamma = 0$ würde, so wäre offenbar:

$$\beta_1^2 \gg m',$$

denn es ist, wenn $2\delta_1 > p'$ ist:

$$\beta_1 = + \frac{p'}{2\delta_1 + \delta_1^2 \cdot p''} \asymp \frac{m'}{\delta_1}$$

und, wenn $2\delta_1 < p'$ ist:

$$\beta_1 \asymp \left(\frac{m'}{m'} = 1\right),$$

also $\beta_1 \asymp 1$, d. h. von der nullten Ordnung in Bezug auf die störende Masse und somit auch $a_0 \asymp 1$ und $S_0 \asymp 1$ und die Entwickelungen würden dann also divergent. Denn wenn sie auch eventuell nicht gleich divergierten, wenn S_0 nur um ein weniges größer als $\frac{1}{1048}$ würde, so würde doch, wenn z. B.:

$$a_0 \asymp \frac{m'^2}{\delta_1^2},$$

offenbar a_0 sehr groß werden, wenn δ_1 sehr klein würde, die Reihen für P und Q dann also sicher divergent.

Bestimmt man indes jetzt bei Hilda a_0 aus der Gleichung:

$$3a_0 = l_0 + l_1\beta_1 + l_2\beta_1^2 + l_3\beta_1^3 + l_4\beta_1^4,$$

also so, dass:

$$c_0 = 0, \quad \text{aber} \quad \gamma = \frac{3}{2}\beta_1^2$$

wird, und führt den Wert:

$$\delta_1 = \delta - \frac{9}{2}\mu\beta_1^2 \tag{10}$$

in Gleichung (5) ein, so finden wir die folgende zu discutierende Gleichung dritten Grades:

$$\beta_1^3 + s\beta_1^2 + t\beta_1 + u = 0, \tag{11}$$

in der:

$$s = \frac{p'''}{9\mu}; \quad t = \frac{p'' - 2\delta}{9\mu}; \quad u = \frac{p'}{9\mu} \tag{12}$$

ist.

Setzen wir, um das quadratische Glied zu eliminieren:

$$\beta_1 = g - \frac{s}{3}, \tag{13}$$

so erhält man an Stelle von Gleichung (11):

$$g^3 + mg + n = 0, \tag{14}$$

wobei:

$$\left.\begin{aligned} m &= t - \frac{s^2}{3} \\ n &= +\frac{2}{27}s^3 - \frac{ts}{3} + u \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

ist.

Da jetzt also:

$$g^3 = -mg + n,$$

so ist, wenn $mg < n$ (was eben hier der Fall ist), doch:

$$-mg + n \asymp n,$$

also auch:

$$g^3 \asymp n.$$

Da aber:

$$n \asymp m',$$

weil alle p und deshalb auch sowohl s wie t und u rein von der Ordnung der störenden Masse sind, so wird auch $g^3 \asymp m'$ und mithin nach (13) auch.

$$\beta_1 \asymp \sqrt[3]{m'}. \tag{16}$$

Diese Grenze also kann jetzt β_1 niemals überschreiten: Der Maximalwert, den die Störungen jemals erreichen können, ist von der Ordnung der Cubikwurzel aus der störenden Masse

Ferner folgt, wenn $\delta = 0$ wird:

$$\delta_1 = -3\mu\beta_1^2,$$

also mit Hinblick auf (16):

$$\delta_1 \asymp \sqrt[3]{m'^2}. \tag{17}$$

Der Minimalwert, unter den jetzt δ_1 niemals herabsinken kann, wird also von der Größenordnung der Cubikwurzel aus dem Quadrat der störenden Masse.[1]

Mithin existieren, wenn factisch würde:

$$\delta_1 \ll \sqrt[3]{m'^2},$$

wo die Entwickelungen thatsächlich divergent werden würden, für einen solchen δ_1 Wert überhaupt keine Planeten mehr, weil eben, wie bewiesen, δ_1 der Größenordnung nach nicht kleiner werden kann als die dritte Wurzel aus dem Quadrate der Jupitermasse. Vielmehr tritt in diesem Falle eine Lücke im System der kleinen Planeten auf und somit liefert die Gyldén'sche Störungstheorie (indem auch bei den folgenden Näherungen die Convergenz sich darthun wird) für jeden δ-Wert, Null inclusive, ein convergentes Resultat. Die in dieser Hinsicht von mathematischer Seite gemachten Einwände sind nicht berechtigt.

Und es sei noch bemerkt, dass die vorstehende, für den 0. Grad entsprechend der Brendel'schen Behandlungsweise für kritische Planeten durchgeführte Entwickelung in gewisser Analogie steht zu Gyldén's horistischer Methode, insofern nämlich, als dasjenige, was Gyldén für den Grad bei Hinzuziehung der Glieder dritten Grades nachgewiesen hat, hier beim nullten Grad für die Ordnungen durchgeführt worden ist. Ganz analog der Gleichung 3. Grades, die im Vorstehenden behandelt wurde, ergibt sich bei Gyldén (cf. Nouvelles recherches pag. 11) bei Rücksichtnahme auf die Glieder dritten Grades eine Gleichung 3. Grades. Würde man in (ρ) bei Bestimmung der $\varkappa_n$ nur den ersten Grad berücksichtigen, so könnte der Fall eintreten, dass ein ς-Divisor äußerst klein oder Null wird (gerade wie im Vorstehenden δ Null werden konnte). Das Auftreten solcher »kritischen« Divisoren vermeidet eben Gyldén, indem er die Glieder dritten Grades mitnimmt, bei deren Bestimmung er zu seiner Gleichung 3. Grades in $\varkappa$ gelangt; während im Vorstehenden zur Vermeidung der verschwindend kleinen Divisoren $\delta_1 = \delta - 3\mu\gamma$ eingeführt wurde. Die Größe $3\mu\gamma$ spielt also hier diesbezüglich der Ordnungen eine ähnliche Rolle wie Gyldén's horistische Function H, welche gleichfalls die kleinen Divisoren von der Null weg begrenzt und darum eben von Gyldén als »horistische«, d. h. »begrenzende« Function bezeichnet wird. Wächst nun die mittlere Bewegung zu einem anderen Typus, so macht δ_1 einen Sprung, während es, wie in der folgenden Rechnung für Hilda gezeigt ist (cf. die »Tafel für die Änderung der mittleren Bewegung und die Lücke im Typus $\frac{2}{3}$«) auch beim Typus $\frac{2}{3}$ selbst einen Sprung macht. Somit ist also δ_1 eine unstetige Function der mittleren Bewegung, und zwar ist sie unstetig für jeden rationalen Wert $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{2}{3} \ldots$ Das steht ganz in Analogie zu Gyldén's horistischer Function H. Auch diese besitzt, wie wir später sehen werden, Umkehrstellen und, da es unendlich viele rationale Werte gibt, hat sie offenbar unendlich viele solcher »Singularitätsstellen«.

Hierzu kommt noch, dass man zwei rationale Werte wählen kann, die beliebig nahe — »überall dicht« — liegen. Die horistische Function ist daher keine analytische Function, auch fehlen ihr, wie Gyldén zeigt, die Ableitungen, und was sie leistet ist also: die Begrenzung der gefährlichen kleinen Divisoren von der Null weg, wodurch sie den auftretenden kritischen Gliedern begegnet und auf convergente Entwickelungen führt, worauf ich bei anderer Gelegenheit zurückkommen werde. Der öfter wiederholte Vorwurf der Divergenz trifft nur die früheren Gyldén'schen Entwickelungen. Während von anderer Seite die Behauptung aufgestellt wurde, um tiefer in das Problem der drei Körper einzudringen, müsse die Theorie der analytischen Functionen vertieft werden, gelangt Gyldén gerade durch Einführung einer nicht analytischen Function zur horistischen, der besten Integrationsmethode, die bisher zur genäherten Lösung des Problems der drei Körper in der Astronomie aufgestellt wurde.

---

[1] Cf. auch: Gyldén, Nouvelles recherches p. 11. Ferner: Brendel, Theorie des kleinen Planeten p. 126.

Weil nun also δ_1 niemals Null werden kann, so kann auch gar nicht strenge:

$$\frac{n'}{n_1} = p_1 = \frac{2}{3}$$

werden, d. h. eine strenge Commensurabilität kann überhaupt nicht eintreten. Es ist aber gerade n_1 die wahre mittlere tägliche Bewegung, nicht aber n, welches als Integrationsconstante stetig alle beliebigen Werte, Null inclusive, annehmen kann. So lange man n als die mittlere tägliche Bewegung definiert, kann man natürlich zu einer Erklärung der im System der kleinen Planeten auftretenden Lücken nicht gelangen, da n als Integrationsconstante natürlich niemals Lücken aufweisen kann; während hingegen:

$$n_1 = \frac{n}{1+\gamma} \tag{18}$$

Lücken aufweisen muss, da δ_1 der Größenordnung nach nie kleiner werden kann als $\sqrt[3]{m'^2}$, und:

$$n_1 = \frac{3n'}{2-\delta_1} \tag{19}$$

ist.

Ginge man in den hier unter Berücksichtigung der Glieder dritter Ordnung durchgeführten Untersuchungen für Hilda weiter und nähme Glieder vierter Ordnung mit, so bliebe die Bestimmungsgleichung (20) für β_1:

$$(2\delta_1+\delta_1^2)\beta_1 = p'+p''\beta_1+p'''\beta_1^2+p''''\beta_1^3 \tag{20}$$

noch vom dritten Grade und γ definiert durch:

$$\gamma = \frac{3}{2}\beta_1^2.$$

Ginge man hingegen bis zu Gliedern fünfter Ordnung:

$$(2\delta_1+\delta_1^2)\beta_1 = p'+p''\beta_1+p'''\beta_1^2+p^{IV}\beta_1^3+p^{V}\beta_1^4, \tag{21}$$

so würde

$$\gamma = \frac{3}{2}\beta_1^2 + \frac{15}{8}\beta_1^4$$

und die Definitionsgleichung (21) von β_1 vom fünften Grade. Ganz allgemein wäre:

$$\left.\begin{aligned}\gamma = \frac{1.3}{1.2}\beta_1^2 + \frac{1}{1.2}\frac{1.3.5}{2^2}\beta_1^4 + \frac{1}{1.2.3}\frac{1.3.5.7}{2^3}\beta_1^6 + \frac{1}{1.2.3.4}\frac{1.3.5.7.9}{2^4}\beta_1^8 + \\ + \ldots + \frac{1}{n!}\frac{1.3.5\ldots(2n+1)}{2^n}\beta_1^{2n} + \ldots = (1-\beta_1^2)^{-\frac{3}{2}} - 1\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

und dieser strenge Wert, der von $\gamma = \frac{3}{2}\beta_1^2$ numerisch indes nur eine kleine Abweichung ergibt, ist der folgenden numerischen Rechnung zugrunde gelegt. Die Reihe (21), die gleichfalls unbegrenzt fortsetzbar ist, convergiert, weil, wie aus der Entwickelung der Störungsfunction hervorgeht, $\frac{p^{(n)}}{p^{(n-1)}}$ sich mit wachsendem n der Einheit nähert und demnach $\frac{p^{(n)}}{p^{(n-1)}}\beta_1^n$ einer Grenze zustrebt, die kleiner als 1 ist. Wie rasch die Reihe convergiert, darüber kann man a priori nichts aussagen; jedenfalls aber hat man praktisch in der numerischen Rechnung keinesfalls weit in der Reihe zu gehen. Ob Glieder vierter Ordnung beim Typus $\frac{2}{3}$ numerisch überhaupt noch in Betracht kommen, bleibt der weiteren Untersuchung vorbehalten. Vorläufig gebe ich hier die Resultate, welche ich für Hilda unter Berücksichtigung inclusive von Gliedern dritter Ordnung gefunden habe.

B. Die numerische Rechnung für Hilda.

Um zunächst den kritischen δ-Wert zu eruieren, für welchen die Lücke auftritt, wurde für δ als Argument eine Reihe von β_1-Werten aus der cubischen Gleichung (14) gerechnet, wie die am Schluss gegebene »Tafel für die Änderung der mittleren Bewegung und die Lücke im Typus $\frac{2}{3}$« angibt. Dabei zeigte sich, dass das kritische δ liegen müsse zwischen 8.450 und 8.460. Den kritischen δ-Wert, für welchen die Bedingung der Lücke:

$$1+\frac{4}{27}\frac{m^3}{n^2}=0 \tag{23}$$

sechsstellig am nächsten erfüllt ist, fand ich zunächst durch ein Näherungsverfahren, das rechnerisch indes sehr weitläufig ist. Deshalb will ich ihn hier principiell bestimmen und setze dazu in Gleichung (15) zur Abkürzung:

$$\frac{2}{27}s^3+u=f.$$

Dann wird die kritische Bedingung (23):

$$27\left(f-\frac{ts}{3}\right)^2+4\left(t-\frac{s^2}{3}\right)^3=0.$$

Dies ist eine cubische Gleichung in t. Zur Elimination des quadratischen Gliedes werde gesetzt:

$$t=l+\frac{s^2}{12},$$

dann ergibt sich nach einer kleinen Rechnung zunächst eine cubische Gleichung in l, nämlich:

$$l^3+rl+p=0,$$

wobei:

$$r=-\frac{9}{2}us-\frac{1}{48}s^4$$

$$p=\frac{27}{4}u^2+\frac{5}{8}us^3-\frac{1}{864}s^6$$

ist, und u wie s, was sich gleich zeigen wird, constante Größen sind, die sich aus den Störungsgliedern der ersten und der dritten Ordnung berechnen lassen. Der Wurzelwert von l aber ist:

$$l=\sqrt[3]{-\frac{r+\sqrt{r^2+\frac{4}{27}p^3}}{2}}+\sqrt[3]{-\frac{r-\sqrt{r^2+\frac{4}{27}p^3}}{2}},$$

und zwar ergibt sich auf Grund der im folgenden für s und u gefundenen Werte numerisch:

$$\log l=8.099936_n-10$$

und damit:

$$\log t=8.099279_n-10.$$

Mittelst des im folgenden berechneten Wertes der Glieder zweiter Ordnung, p'', aber erhält man hiernach für δ aus:

$$\delta = \frac{p'' - 9\mu t}{2}$$

$$\log \delta = 8.453130,$$

ein Wert, der die kritische Bedingung (23), indem sich m und n aus (15) ergeben, indes noch nicht völlig erfüllt, da bei der Berechnung von l, selbst wenn man die höheren Stellen beim Ausziehen der Quadratwurzel sehr weit berücksichtigt, eine gewisse Ungenauigkeit unvermeidlich ist, was mit daher rühren dürfte, dass das Glied $\frac{s^6}{864}$ in p numerisch gänzlich fortfällt. Mit obigem δ-Wert findet man nämlich:

$$1 + \frac{4}{27}\frac{m^3}{n^2} = -0.000035.$$

Nun überzeugt man sich aber leicht, dass, wenn δ wächst, auch $\frac{m^3}{n^2}$ wächst. Daher braucht man den gefundenen δ-Wert offenbar in den letzten Stellen nur ein wenig zu verkleinern und erhält so sofort als das kritische δ, welches die Bedingung der Lücke sechsstellig am nächsten erfüllt:

$$\log \delta = 8.453120.$$

In der That wird für diesen δ-Wert:

$$1 + \frac{4}{27}\frac{m^3}{n^2} = -0.000002,$$

während für die beiden benachbarten δ-Werte:

$$\log \delta = \begin{cases} 8.453119 \\ 8.453121 \end{cases}$$

sich:

$$1 + \frac{4}{27}\frac{m^3}{n^2} = \begin{cases} +0.000005 \\ -0.000005 \end{cases}$$

ergibt.

Auf Grund der im zweiten Capitel durchgeführten numerischen Entwickelung der Störungsfunction für den Planeten Hilda ergeben sich zur Berechnung der Störungen 0ten Grades bis zur dritten Ordnung inclusive zunächst nach den Formeln (19) desselben Capitels aus den γ folgende Werte für die Ω, die, wie alle folgenden Zahlenwerte, zweimal unabhängig ermittelt wurden:

$$\left.\begin{array}{lll} \log \Omega_{3.0.0} = 9.176240 & \log \Omega_{6.0.0} = 8.689615 & \log \Omega_{9.0.0} = 8.252822 \\ \log \Omega_{3.1.0} = 9.788548\,n & \log \Omega_{6.1.0} = 9.546530\,n & \log \Omega_{9.1.0} = 9.263056\,n \\ \log \Omega_{3.2.0} = 0.285070 & \log \Omega_{6.2.0} = 0.196703 & \log \Omega_{9.2.0} = 0.033433 \\ \log \Omega_{3.3.0} = 0.768115\,n & \log \Omega_{6.3.0} = 0.763357\,n & \log \Omega_{9.3.0} = 0.688875\,n \end{array}\right\} \quad (24)$$

Aus den Ω ergeben sich die P und Q auf Grund der Formeln (24):

$$\left.\begin{array}{lll} \log P_{3.0.0} = 9.788548 & \log P_{6.0.0} = 9.546530 & \log P_{9.0.0} = 9.263056 \\ \log P_{3.1.0} = 0.586100\,n & \log P_{6.1.0} = 0.497733\,n & \log P_{9.1.0} = 0.334463\,n \\ \log P_{3.2.0} = 1.245236 & \log P_{6.2.0} = 1.240478 & \log P_{9.2.0} = 1.165996 \\ & & \\ \log Q_{3.0.0} = 9.176240 & \log Q_{6.0.0} = 8.689615 & \log Q_{9.0.0} = 8.252822 \\ \log Q_{3.1.0} = 9.961250\,n & \log Q_{6.1.0} = 9.653076\,n & \log Q_{9.1.0} = 9.340547\,n \\ \log Q_{3.2.0} = 0.557153 & \log Q_{6.2.0} = 0.384477 & \log Q_{9.2.0} = 0.176157 \end{array}\right\} \quad (25)$$

Damit ergeben sich für die Entwickelungscoefficienten A und B der partiellen Derivierten Q und P der Störungsfunction Ω mittelst (44) die Werte:

$$\left.\begin{array}{lll}
\log A_{3.0.0} = 9.954391\,n & \log A_{6.0.0} = 9.768796\,n & \log A_{9.0.0} = 9.508095\,n \\
\log A^{1.0}_{3.0.0} = 0.739401 & \log A^{1.0}_{6.0.0} = 0.732257 & \log A^{1.0}_{9.0.0} = 0.595820 \\
\log A^{2.0}_{3.0.0} = 1.335304\,n & \log A^{2.0}_{6.0.0} = 1.463658\,n & \log A^{2.0}_{9.0.0} = 1.431430\,n \\
 & & \\
\log B_{3.0.0} = 0.089578 & \log B_{6.0.0} = 9.847560 & \log B_{9.0.0} = 9.564086 \\
\log B^{1.0}_{3.0.0} = 0.887130\,n & \log B^{1.0}_{6.0.0} = 0.798763\,n & \log B^{1.0}_{9.0.0} = 0.635493\,n \\
\log B^{2.0}_{3.0.0} = 1.546266 & \log B^{2.0}_{6.0.0} = 1.541508 & \log B^{2.0}_{9.0.0} = 1.467026 \\
 & \log B^{1.0}_{0.0.0} = 0.533421\,n &
\end{array}\right\} \quad (26)$$

An dieser Stelle controliren wir indes diese sämmtlichen A- und B-Werte, indem wir sie noch einmal, und zwar nach der zweiten Gyldén'schen Methode, wie sie im zweiten Capitel auseinandergesetzt wurde, berechnen. Auf Grund der dort gegebenen Formeln (61 *b*), welche die A und B direct als Functionen der ϑ geben, erhält man, unter Berücksichtigung der im zweiten Capitel für die »ϑ« für Hilda gefundenen numerischen Werte (87), folgende Resultate für die A- und B-Coefficienten:

$$\left.\begin{array}{lll}
\log A_{3.0.0} = 9.954391\,n & \log A_{6.0.0} = 9.768796\,n & \log A_{9.0.0} = 9.508095\,n \\
\log A^{1.0}_{3.0.0} = 0.739401 & \log A^{1.0}_{6.0.0} = 0.732256 & \log A^{1.0}_{9.0.0} = 0.595821 \\
\log A^{2.0}_{3.0.0} = 1.335304\,n & \log A^{2.0}_{6.0.0} = 1.463658\,n & \log A^{2.0}_{9.0.0} = 1.431431\,n \\
 & & \\
\log B_{3.0.0} = 0.089579 & \log B_{6.0.0} = 9.847561 & \log B_{9.0.0} = 9.564086 \\
\log B^{1.0}_{3.0.0} = 0.887129\,n & \log B^{1.0}_{6.0.0} = 0.798763\,n & \log B^{1.0}_{9.0.0} = 0.635493\,n \\
\log B^{2.0}_{3.0.0} = 1.546266 & \log B^{2.0}_{6.0.0} = 1.541506 & \log B^{2.0}_{9.0.0} = 1.467027, \\
 & \log B^{2.0}_{0.0.0} = 0.533420\,n, &
\end{array}\right\} \quad (26a)$$

die sich in Übereinstimmung mit den zuvor gefundenen Werten (26) befinden.

Mit diesen Werten berechnete ich nun die Glieder der ersten, zweiten und dritten Ordnung p', p'', p''' auf Grund der Formeln (6) dieses Capitels. Dabei wurde δ_1, welches später bestimmt werden wird, bei der ersten Näherung zunächst Null gesetzt. Das Verhältnis μ folgt aus:

$$\mu = \sqrt{\alpha^3(1+m')},$$

wobei die Jupitermasse zu:

$$\log m' = 6.9796387$$

und für α der Ausgangswert der ganzen Rechnung:

$$\log \alpha = 9.8810475$$

angenommen wurde. So ergab sich:

$$\left.\begin{array}{l}
\log \mu = 9.821778 \\
\log p' = 7.461038 - 10 \\
\log p'' = 8.261640\,n - 10 \\
\log p''' = 8.951316 - 10,
\end{array}\right\} \quad (27)$$

wobei p', p'', p''' die Jupitermasse bereits enthalten, indem nach den früheren Entwickelungen alle A und B mit m' zu multiplicieren sind, was nicht zu vergessen ist, wenn man aus den A und B die Störungen rechnet.

Für die Coefficienten der cubischen Gleichung (11) folgt:

$$\left.\begin{aligned} \log s &= 8.175295-10 \\ \log u &= 6.685017-10. \end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

Hingegen wird man für t offenbar einen verschiedenen Wert erhalten, je nachdem man δ variiert. Und zwar ertheilte ich δ die im Argument der folgenden Tafel angegebenen Werte, welche in der Nähe der Lücke eng gewählt sind, um den Verlauf der mittleren Bewegung in unmittelbarster Nachbarschaft der Lücke verfolgen zu können. Aus der folgenden Tafel kann man dann auch, nachdem δ_1 aus den Beobachtungen bestimmt ist, wozu jedoch erst die weiteren Entwickelungen für den Hilda-Typus fertig gestellt sein müssen, das zu dem δ_1 von Hilda gehörige β_1 und n_1 und somit die unbekannte mittlere Bewegung des Planeten Hilda bestimmen. Eine ähnliche Tafel wie die folgende für β_1 wird später bei Berechnung der Störungen ersten Grades für $\beta_2 \ldots \beta_5$ berechnet werden, aus der man in analoger Weise die zu Hilda gehörigen Werte der $\beta_2 \ldots \beta_5$ entnimmt, und analog beim zweiten Grad.

Indem wir nun δ die 22 in der folgenden Tafel als Argument enthaltenen Werte ertheilen, folgen zunächst nach (11) ebensoviel cubische Gleichungen mit numerisch gegebenen Coefficienten. Eliminiert man aus denselben mit Hinblick auf die Formeln (13) bis (15) das quadratische Glied, so erhält man das folgende System reducierter cubischer Gleichungen, welches uns zur Discussion der mittleren Bewegung des Typus $\frac{2}{3}$ dienen soll:

$\log \delta$	$g^3 + \quad mg \quad + \quad n \quad = 0$		
$8.086318\,n$	$g^3+[6.978760\ ]g+[6.680620]=0$	$1+\frac{4}{27}\frac{m^3}{n^2} > 0$	(29)
$7.498640\,n$	$g^3+[7.317654n]g+[6.694112]=0$		
$7.331930\,n$	$g^3+[7.382855n]g+[6.695585]=0$		
$7.057810\,n$	$g^3+[7.439545n]g+[6.697054]=0$		
$-\infty$	$g^3+[7.496100n]g+[6.698716]=0$		
7.012481	$g^3+[7.541422n]g+[6.700209]=0$		
7.897473	$g^3+[7.761879n]g+[6.710042]=0$		
8.138964	$g^3+[7.889128n]g+[6.718277]=0$		
8.363193	$g^3+[8.036006n]g+[6.731015]=0$		
8.406714	$g^3+[8.067414n]g+[6.734285]=0$		
8.417544	$g^3+[8.075365n]g+[6.735146]=0$		
8.453120	$\mathbf{g^3+[8.101847n]g+[6.738118]=0}$	$\mathbf{1+\frac{4}{27}\frac{m^3}{n^2}=0}$	
8.453144	$g^3+[8.101864n]g+[6.738120]=0$	$1+\frac{4}{27}\frac{m^3}{n^2} < 0$	
8.453219	$g^3+[8.101920n]g+[6.738127]=0$		
8.453590	$g^3+[8.102200n]g+[6.738159]=0$		
8.458139	$g^3+[8.105626n]g+[6.738557]=0$		
8.462593	$g^3+[8.108990n]g+[6.738948]=0$		
8.473633	$g^3+[8.117363n]g+[6.739937]=0$		
8.484601	$g^3+[8.125733n]g+[6.740942]=0$		
8.495447	$g^3+[8.134059n]g+[6.741958]=0$		
8.506412	$g^3+[8.142525n]g+[6.743009]=0$		
8.538897	$g^3+[8.167886n]g+[6.746267]=0$		

Allgemein ist nun die Lösung einer cubischen Gleichung:

$$g^3+mg+n=0$$

gegeben:

I. Wenn $1+\frac{4}{27}\frac{m^3}{n^2}>0$ ist, durch die eine reelle Wurzel:

$$g=\sqrt[3]{\frac{-n+\sqrt{n^2+\frac{4}{27}m^3}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-n-\sqrt{n^2+\frac{4}{27}m^3}}{2}}. \tag{30}$$

II. Wenn $1+\frac{4}{27}\frac{m^3}{n^2}=0$ ist, durch drei reelle Wurzeln, von denen zwei einander gleich sind, nämlich durch:

$$\left.\begin{aligned} g_1=g_2&=+\sqrt[3]{\frac{n}{2}}\\ g_3&=-2\sqrt[3]{\frac{n}{2}}\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

III. Wenn $1+\frac{4}{27}\frac{m^3}{n^2}<0$ ist, durch drei reelle Wurzeln. In diesem Falle löst man die cubische Gleichung bekanntlich trigonometrisch, indem man setzt:

$$\sin 3\alpha=n\sqrt{-\frac{27}{4m^3}} \tag{32}$$

und erhält die drei Wurzeln:

$$\left.\begin{aligned} g_1&=\sqrt{-\frac{4}{3}m}\,\sin\alpha\\ g_2&=\sqrt{-\frac{4}{3}m}\,\sin(60-\alpha)\\ g_3&=-\sqrt{-\frac{4}{3}m}\,\sin(60+\alpha)\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Eine Controle der Cardanischen Formel (30) für die numerische Rechnung erhält man durch eine trigonometrische Substitution. Äquivalent der Formel (30) ist nämlich:

1. wenn $m>0$ ist:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\omega&=\frac{2}{n}\sqrt[2]{\frac{1}{27}m^3}\\ g&=\sqrt[2]{\frac{m}{3}}\sqrt[3]{\operatorname{tg}\omega}-\frac{\sqrt[2]{\frac{m}{3}}}{\sqrt[3]{\operatorname{tg}\omega}}\end{aligned}\right\}. \tag{34}$$

2. wenn $m<0$ ist:

$$\left.\begin{aligned} \sin 2\omega&=\frac{2}{n}\sqrt[2]{-\frac{m^3}{27}}\\ g&=-\sqrt[3]{\sqrt[2]{\frac{m^3}{27}}\operatorname{tg}\omega}-\sqrt[3]{\sqrt[2]{\frac{m^3}{27}}\operatorname{cotg}\omega}\end{aligned}\right\} \tag{35}$$

oder:

$$\left.\begin{aligned} \sin 2\omega &= \frac{1}{n}\sqrt[2]{\frac{4}{27}(-m^3)} \\ g &= -\sqrt[3]{n\sin^2\omega} - \sqrt[3]{n\cos^2\omega}. \end{aligned}\right\} \quad (36)$$

In unserem Systeme (29) lassen also die ersten 11 Gleichungen je eine Lösung zu; die Gleichung (12) hat zwei Lösungen; während die letzten 10 Gleichungen zwar je drei Lösungen besitzen, von denen jedoch die erste der beiden durch:

$$g_2 = \sqrt{-\frac{4}{3}m}\,\sin(60-\alpha)$$

und:

$$g_3 = -\sqrt{-\frac{4}{3}m}\,\sin(60+\alpha)$$

dargestellten Wurzelserien nicht die Eigenschaft besitzt, mit wachsendem δ_1 abzunehmen und deshalb, wie ein Blick auf unsere Tafel lehrt, astronomisch ausgeschlossen ist; während die zweite zu verwerfen ist, weil sonst δ_1 die Null erreichen würde, während es, wie wir sahen, höchstens von der Ordnung $\sqrt[3]{m'^2}$ werden kann. Astronomisch lassen also alle Gleichungen des Systems (29) nur eine einzige Lösung zu, mit alleiniger Ausnahme der Gleichung (12) für das kritische δ, welche zwei Lösungen besitzt, und die Grenzen der Lücke des Typus $\frac{2}{3}$ im System der kleinen Planeten in erster Näherung definiert. Nach Lösung des Systems (29) folgen aus den Wurzeln g die ursprünglich gesuchten Wurzeln β_1 gemäß Gleichung (13):

$$\beta_1 = g - \frac{s}{3}.$$

Die in unserer Tafel gegebene Wurzelserie des Casus irreducibilis, welche aus $g = \sqrt{-\frac{4}{3}m}\,\sin\alpha$ hervorgeht, hingegen nimmt ab, wenn δ_1 wächst und stellt den weiteren Verlauf der mittleren Bewegung jenseits der Lücke dar. Eine Controle für die Richtigkeit der gefundenen Wurzelwerte, speciell derjenigen des casus irreducibilis, die nur auf eine Weise bestimmt wurden, erhält man, indem man die β_1 in Gleichung (11) einsetzt, so t bestimmt, dann mittelst dieser gefundenen t-Werte m und n berechnet, ferner g aus $g = \beta_1 + \frac{1}{3}s$ bestimmt und hierauf die so erhaltenen g-Werte in Gleichung (14) einsetzt. Man überzeugt sich, dass in der That die in der folgenden Tafel für β_1 gegebenen Werte sämmtlich die Gleichung (14) erfüllen.

Nachdem die zu den verschiedenen δ gehörigen Werte β_1 nach den Formeln (30) bis (36) berechnet worden waren, wurde weiter gerechnet nach dem früheren γ aus:

$$\gamma = \frac{1}{(1-\beta_1^2)^{\frac{3}{2}}} - 1. \quad (37)$$

Hierauf δ_1 aus:

$$\delta_1 = \delta - 3\mu\gamma, \quad (38)$$

Die wahre mittlere tägliche Bewegung des Typus $\frac{2}{3}$ gemäß der Definition $\mu_1 = \frac{2-\delta_1}{3}$ aus:

$$n_1 = \frac{3n'}{2-\delta_1} \quad (39)$$

und die Bewegungsconstante n (welche also Integrationsconstante ist, während man statt ihrer a auch als Integrationsconstante betrachten kann) aus:

$$n = \frac{3n'}{2-\delta}. \tag{40}$$

So erhielt ich die folgende Tafel, welche nicht nur einen Einblick in den Verlauf der mittleren Bewegung n_1 an den Grenzen der Lücke und diese letztere selbst gibt, sondern später, nachdem wir δ_1 bestimmt haben, auch das zu Hilda gehörige β_1 und n_1 liefert:

Tafel für die Änderung der mittleren Bewegung und die Lücke im Typus $\frac{2}{3}$.

log δ	log β_1	log γ	log δ_1	Wahre mittlere Bewegung n_1	n
8.086318 n	8.898718 n	7.976979	8.492389 n	441.8290	445.9722
7.498640 n	8.967517 n	8.115727	8.464365 n	442.2510	447.9867
7.331930 n	8.974389 n	8.129660	8.462003 n	442.2850	448.2111
7.057810 n	8.981119 n	8.143232	8.459696 n	442.3190	448.4367
$-\infty$	8.988598 n	8.158433	8.457332 n	442.3530	448.6930
7.012481	8.995184 n	8.171761	8.455269 n	442.3830	448.9230
7.897473	9.035752 n	8.254036	8.444431 n	442.5350	450.4710
8.138964	9.066330 n	8.316165	8.438460 n	442.6190	451.8040
8.363193	9.108522 n	8.402139	8.433945 n	442.6810	453.9300
8.406714	9.118485 n	8.422503	8.433613 n	442.6850	454.4900
8.417544	9.121058 n	8.427749	8.433544 n	442.6860	454.6380
Argument der Lücke:					
8.453120	**9.129774 n**	**8.445567**	**8.433531 n**	**442.6860**	**455.1522**
	8.777622	**7.733141**	**8.246041**	**452.6820**	
8.453144	8.774813	7.727503	8.249488	452.7140	455.1533
8.453219	8.771739	7.721474	8.253173	452.7478	455.1544
8.453590	8.764691	7.707372	8.261793	452.8300	455.1600
8.458139	8.734760	7.647111	8.298547	453.1990	455.2290
8.462593	8.718284	7.614014	8.318689	453.4150	455.2970
8.473633	8.689010	7.555204	8.354365	453.8233	455.4700
8.484601	8.666502	7.510171	8.381627	454.1600	455.6467
8.495447	8.647368	7.471361	8.404852	454.4644	455.8240
8.506412	8.629959	7.436938	8.425700	454.7522	456.0100
8.538897	8.585006	7.346887	8.479461	455.5633	456.5889

Die Lücke

(41)

Aus dieser Tafel erkennt man, dass für den Typus $\frac{2}{3}$ die Maximalwerte, welche β_1 jemals erreichen kann, bezüglich:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= -0.135\ldots \\ \beta_1 &= +0.060\ldots \end{aligned} \tag{42}$$

sind, und dass entsprechend diesen Werten stets sein muss:

$$\begin{aligned} \delta_1 &< -0.027\ldots \\ \delta_1 &> +0.018\ldots \end{aligned} \tag{43}$$

Damit muss also die wahre tägliche Bewegung eines Planeten der Hilda-Gruppe stets sein:

$$\begin{aligned} n_1 &< 442''.69 \\ n_1 &> 452''.68, \end{aligned} \tag{44}$$

womit bewiesen, dass zwischen diesen beiden Werten der mittleren Bewegung überhaupt keine Planeten vorkommen können, sondern eine Lücke im System der kleinen Planeten auftreten muss.

Die Grenzen der Lücke ohne Berücksichtigung der Glieder dritter Ordnung sind $44''.38$ und $451''.9$.

Bei Mitnahme von Gliedern erster und zweiter Ordnung allein beträgt die Lücke also $8''.1$, bei Mitnahme von Gliedern erster, zweiter und dritter Ordnung aber beträgt die Lücke $10''.0$. Man sieht also, dass sich infolge der Mitnahme der Glieder dritter Ordnung die Lücke nicht allein wesentlich verschiebt, nämlich von $443''.8$ bis $451''.9$ nach $442''.7$ bis $452''.7$, sondern dass sie sich auch um $1''.9$, also nahezu um zwei ganze Secunden erweitert. Indes ist diese so bestimmte Lücke noch nicht mit der wirklich im System der kleinen Planeten auftretenden Lücke des Hilda-Typus identisch, da wir die Störungen höheren Grades noch nicht berücksichtigt haben. Und sie ist auch für den nullten Grad numerisch noch nicht völlig exact bestimmt, da wir vorläufig δ_1 bei Berechnung der Glieder erster, zweiter und dritter Ordnung in den Gleichungen (6) dieses Capitels Null gesetzt und auch noch den Einfluss der Glieder vierter Ordnung zu untersuchen haben. Es wird von Interesse sein, zu sehen, wie sich die Grenzen der im Vorstehenden bestimmten Lücke bei Mitnahme der zu berücksichtigenden Störungen höheren Grades und von δ_1, sowie der Glieder vierter Ordnung verändern, was neben der numerischen Berechnung der Bahn selbst von Hilda zu zeigen der Fortsetzung dieser Untersuchungen vorbehalten bleibt.

Jedenfalls ist es der neuen, von Gyldén geschaffenen Störungstheorie zu danken, dass die wichtigsten mechanischen Probleme des Planetensystems, welche für die theoretische Astronomie vorher unlösbare Fragen waren, nun zugänglich geworden und sicher und verhältnismäßig einfach zu erledigen sind.

Jena, im März 1901.

Hugo Buchholz.